الجمهورية العربية السورية
وزارة التعليم العالي
الجامعة السورية الدولية الخاصة
الإجازة في إدارة الأعمال
مقرر: رياضيات الأعمال
العام الدراسي ٢٠١٧-٢٠١٨ الفصل الأول

رياضيات الأعمال

Mathematics for Business

الأستاذ الدكتور طلال عبود
Professor Dr. Talal ABOUD

جدول المحتويات

١) مجموعات الأعداد

الأعداد الطبيعية: ١، ٢، ٣، ... ∞ القيم الموجبة.

مثال: عدد العمال هو عدد طبيعي، ولا يمكن القول مثلاً نصف عامل أو ١٥,٣٣ عامل.

الأعداد الصحيحة: الأعداد الطبيعية السالبة والموجبة −∞، ...، −٢، −١، ٠، ١، ٢، ٣... ∞ ،

مثال: زيادة أو نقصان قطع في مستودع، قد يكون موجب (هناك زيادة) أو سالب (نقص).

مثال: الربح أو الخسارة مقدرة بالليرات السورية الصحيحة بدون كسور.

الأعداد الكسرية: $\frac{a}{b}$ حيث a، b أعداد صحيحة.

مثال: إذا كان أجر أحد العاملين يعمل كامل الأسبوع هو ٢٢ ألف ل.س أسبوعياً، فإن أجره اليومي هو $\frac{22000}{7}$ ل.س.

الأعداد الحقيقية: جميع الأعداد بين −∞ و +∞، بين كل عددين هناك عدد ثالث. تشمل هذه الفئة من الأعداد جميع المجموعات السابقة، وتمثل على شكل مستقيم موجه (محور) من −∞ إلى +∞.

مثال: تكلفة تشغيل آلة في الساعة ١٥,٦٥ ل.س.

٢) التوابع من الدرجة الأولى

٢-١ تعريف

التابع من الدرجة الأولى هو كثير حدود من الشكل $F(x) = ax + b$ ، حيث $a,\ \ b$ أعداد ثابتة حقيقية و a غير معدوم.

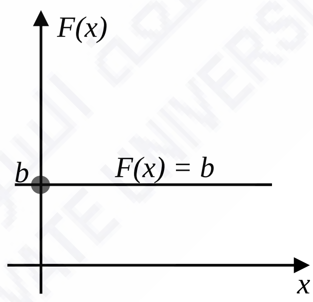
يُدعى الثابت a بميل التابع ويُمثل ظل الزاوية التي يصنعها الخط البياني مع محور السينات، في حين يمثل الثابت b قيمة $F(x)$ عندما $x=0$ أي نقطة تقاطع الخط البياني للتابع مع محور العينات.

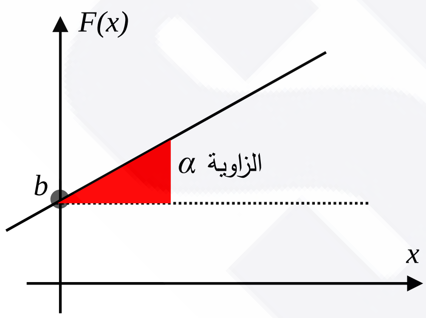
إشارة كثير الحدود $F(x)$ تعني تحديد قيمة المتحول x التي تجعل $F(x)$ سالب أو موجب:

$$F(x) = 0 \qquad ax + b = 0$$

يمثل معادلة من الدرجة الأولى لها حل/جذر وحيد هو $x = -\dfrac{b}{a}$ ، تكون إشارة $F(x)$ مخالفة لإشارة a قبل الجذر وموافقة لإشارة a بعد الجذر.

ويكون الخط البياني للتابع من الدرجة الأولى على شكل خط مستقيم:





<u>مثال (١)</u> ادرس إشارة $F(x) = 2x - 4$

نحسب قيمة x التي تعدم $F(x)$: $F(x) = 2x - 4 = 0 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = \dfrac{4}{2} = 2$

إشارة $F(x)$ مخالفة لإشارة $a=2$ أي سالب قبل الجذر ٢ أي من أجل $x<2$ $\quad x \in \left]-\infty, 2\right[$

وموافقة لإشارة $a=2$ أي موجب بعد الجذر ٢ أي من أجل $x>2$ $\quad x \in \left]2, +\infty\right[$

مثال (٢) ادرس إشارة $F(x)=2x$

نحسب قيمة x التي تعدم $F(x)$: $F(x)=2x=0 \Rightarrow 2x=0 \Rightarrow x=0$

إشارة $F(x)$ مخالفة لإشارة $a=0$ أي سالب قبل الصفر وموجب بعد الصفر، باختصار له نفس إشارة x.

مثال (٣) أوجد المعادلة لمستقيم يمر بالنقطة $(1, 5)$ وميله يساوي ٢.

إيجاد معادلة المستقيم $F(x)=ax+b$ يعني إيجاد قيم ثوابت المعادلة a, b .

الميل: $a = 2$،

حساب قيمة b: نبدل قيم النقطة $F(x) = 1$ من أجل $x = 5$ في المعادلة فتصبح: $5 = 2x1$

$+b$ وبالتالي تحسب قيمة b: $b = 5\text{-}2 = 3$ ،

فتصبح معادلة المستقيم: $F(x) = 2\,x + 3$.

٢-٢ تطبيقات

تطبيق (١): التكاليف الكلية.

تبلغ التكاليف الثابتة لأحد مصانع الأحذية ٢٠٠٠ ل.س شهرياً، كما تبلغ تكلفة إنتاج الحذاء الواحد ٥٠ ل.س. والمطلوب:

١. لنرمز لعدد القطع المنتجة بـ x، فما هي صيغة تابع التكاليف الكلية ولنرمز لها بـ $C(x)$.
٢. رسم الخطي البياني للتابع $C(x)$.

الحل:

١. التكاليف الكلية = التكاليف الثابتة + (عدد القطع * تكلفة القطعة الواحدة)

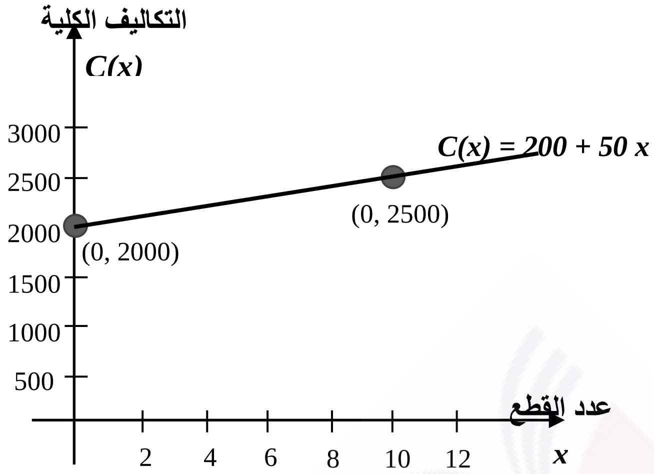
فتصبح صيغة تابع التكاليف الكلية: $C(x) = 2000 + 50\,x$

٢. رسم الخط البياني: أبسط طريقة هي رسم نقطتين من التابع والوصل فيما بينها.

النقطة الأولى: لتكن $x=0$ فتصبح $C(x=0) = 2000$ تكتب بشكل $(0, 2000)$

النقطة الثانية: لتكن $x=10$ فتصبح $C(x=5) = 2000 + 50 * 5 = 2500$ تكتب $(5, 2500)$

نلاحظ أن التابع يتزايد بمعدل ثابت، أي ٥٠ ل.س لكل واحدة إضافية من x.



تطبيق (٢): اهتلاك آلة.

اشترى أحد التجار آلة بقيمة ٢٠ ألف ل.س، ويستهلكها بشكل خطي على عشر سنوات.

١) اكتب معادلة اهتلاك الآلة $F(x)$ كتابع لسنوات الاستعمال x.

٢) رسم الخط البياني لتابع الاهتلاك $F(x)$.

٣) ما هي قيمة الآلة بعد ٤ سنوات من الاستعمال.

الحل:

١) معادلة تابع اهتلاك الآلة $F(x)$ كتابع لسنوات الاستعمال x:

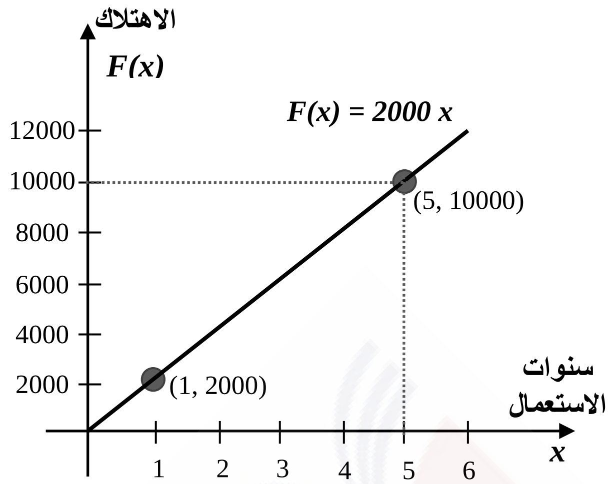
تستهلك الآلة على ١٠ سنوات وبالتالي قيمة الاهتلاك السنوية: $\frac{20000}{10} = 2000$ ل.س

ويُصبح الاهتلاك كتابع لعدد السنوات x: $\boldsymbol{F(x) = 2000\, x}$ أي قسط الاهتلاك السنوي مضروباً بعدد السنوات، وبالتالي تُهتلك الآلة كلياً بعد ١٠ سنوات.

٢) رسم الخط البياني: يكفي تحديد نقطتين من الخط البياني ثم الوصل بينهما.

لنأخذ النقطة الأولى من أجل $x = 1$ فيكون $F(1) = 2000$: النقطة $(1, 2000)$

لنأخذ النقطة الثانية من أجل $x = 5$ فيكون $F(5) = 10.000$: النقطة $(5, 10.000)$



٣) قيمة الآلة بعد ٤ سنوات من الاستعمال:

الاهتلاك خلال السنوات الأربعة يساوي: $F(4) = 2000 \times 4 = 8000$

ويصبح قيمة الآلة بعد طرح قيمة الاهتلاكات: $20000 - 8000 = 12000$ ل.س.

تطبيق (٣): تكاليف الطباعة.

يقدر أحد الناشرين تكلفة طباعة النسخة الواحدة من أحد الكتب بحوالي ٥٠ ل.س إذا كان عدد النسخ المطبوعة لا يتجاوز ١٠٠٠ نسخة، وتتناقص إلى ٤٠ ل.س إذا تجاوز عدد النسخة المطبوعة ١٠٠٠ نسخة. والمطلوب:

١) ما هو تابع تكلفة الطباعة $F(x)$ بدلالة عدد النسخ x.

٢) رسم الخط البياني للتابع.

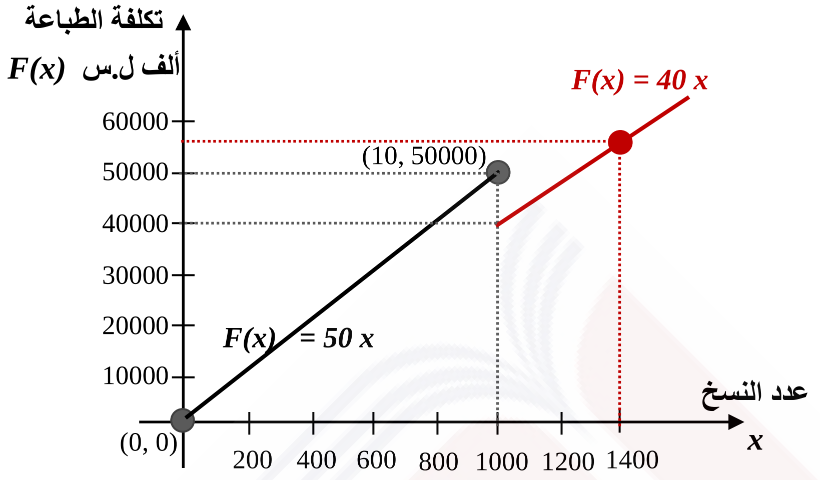
الحل:

١) يأخذ تابع الطباعة $F(x)$ صيغتان حسب قيم x كما يلي:

إذا كان $x \leq 1000$ يأخذ التابع الشكل $F(x) = 50\,x$

إذا كان $x > 1000$ يأخذ التابع الشكل $F(x) = 40\,x$

٢) الخط البياني للتابع: نلاحظ أن التابع غير مستمر عن النقطة $x = 1000$ وذلك بسبب تغير الميل من ٥٠ إلى ٤٠.



٣- كثيرات الحدود من الدرجة الثانية

٣-١ دراسة إشارة كثير الحدود من الدرجة الثانية

له الشكل $F(x) = ax^2 + bx + c$، حيث a,b,c أعداد حقيقية و a غير معدوم، يمثل معادلة من الدرجة الثانية. عندما يكون $a = 0$ فإن كثير الحدود يصبح من الدرجة الأولى.

دراسة إشارة $F(x)$ تعني تحديد قيم x التي تجعل $F(x)$ سالب أو موجب، ولذلك نقوم بما يلي:

١) اعتبار كثير الحديد كمعادلة من الدرجة الثانية أي $F(x) = 0$

٢) إيجاد جذور المعادلة (إن وجدت)

٣) دراسة إشارة المقدار $F(x)$ بين الجذرين، وخارج الجذرين

٤) وضع جدول مساعد لتغيرات قيم x وقيم كثير الحدود $F(x)$ وجذور المعادلة.

نعدم معادلة كثير الحدود: $ax^2 + bx + c = 0 \qquad F(x) = 0$

نحسب المميز $\Delta = b^2 - 4ac$، هناك ثلاث حالات ممكنة:

الحالة الأولى: $\Delta > 0$ للمعادلة جذران حقيقيان.

الحالة الثانية: $\Delta = 0$ للمعادلة جذر مضاعف.

الحالة الثالثة: $\Delta < 0$ ليس للمعادلة جذور.

الحالة الأولى $\Delta > 0$، نحسب جذرا المعادلة بالشكل الآتي:

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

نضع جدول فتكون إشارة $F(x)$ بين الجذرين مخالف لإشارة a وخارج الجذرين موافق لإشارة a:

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
إشارة $F(x)$	**موافق لإشارة** a	0	**مخالف لإشارة** a	0	**موافق لإشارة** a

الحالة الثانية $\Delta = 0$: نحسب الجذر المضاعف $x_0 = -\frac{b}{2a}$ وتكون إشارة $F(x)$ قبل وبعد الجذر موافقة لإشارة a.

الحالة الثالثة $\Delta < 0$: لا يوجد جذور حقيقية لـ $F(x)$ ، وتكون إشارته موافقة لإشارة a.

مثال (١) ادرس إشارة المقدار $F(x) = -2x^2 - x + 3$

الحل:

$$F(x) = 0 \Rightarrow -2x^2 - x + 3 = 0$$
$$a = -2 \qquad b = -1 \qquad c = 3$$
$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 \times (-2) \times 3 = 25 > 0$$
$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+5}{2 \times (-2)} = -1.5$$
$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-5}{2 \times (-2)} = +1$$

x	$-\infty$	-1.5		+1	$+\infty$
إشارة $F(x)$	**موافق لإشارة a أي سالب**	0	**مخالف لإشارة a أي موجب**	0	**موافق لإشارة a أي سالب**

من أجل قيم $x \in]-\infty, -1.5[\cup]+1, +\infty[$ فإن $F(x)$ يكون سالب تماماً،

ومن أجل قيم $x \in]-1.5, +1[$ فإن $F(X)$ يكون موجب تماماً.

مثال (٢) ادرس إشارة $F(x) = x^2 - 6x + 9$

الحل:

$$F(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 0$$
$$a = 1 \qquad b = -6 \qquad c = 9$$
$$\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 4 \times 1 \times 9 = 0$$
$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{2} = +3$$

x	$-\infty$	+3	$+\infty$
إشارة $F(x)$	**موافق لإشارة a أي موجب**	0	**موافق لإشارة a أي موجب**

مثال (٣) ادرس إشارة $F(x)=3x^2-x+1$

الحل:

$$F(x)=0 \Rightarrow 3x^2-x+1=0$$
$$a=3 \qquad b=-1 \qquad c=1$$
$$\Delta=b^2-4ac=1-4\times3\times1=-11<0$$

حيث أن المميز سالب فلا يوجد جذور للمعادلة، وإشارة $F(x)$ توافق إشارة a أي موجب دوماً.

٣-٢ وضع كثير حدود من الدرجة الثانية على شكل جداء

إذا كـان لكثيـر الحـدود مـن الدرجـة الثانيـة $F(x)=ax^2+bx+c$ جـذران x_1 و x_2 فإننـا نسـتطيع كتابته على شكل جداء: $F(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$

وإذا كان له جذر مضاعف x_0 نكتبه على الشكل: $F(x)=a(x-x_0)^2$

مثال (١) ضع كثير الحدود $F(x)=-4x^2-2x+2$ على شكل جداء.

نحسب جذور المعادلة $F(x)=0$:

$$F(x)=0 \Rightarrow -4x^2-2x+2=0$$
$$a=-4 \qquad b=-2 \qquad c=2$$
$$\Delta=b^2-4ac=4-4\times(-4)\times2=36>0$$
$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{+2+6}{2\times(-4)}=-1 \qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{+2-6}{2\times(-4)}=0.5$$

وبالتالي يكتب $F(x)$ عل شكل جداء: $F(x)=2(x+1)(x-0.5)$

<u>مثال (٢)</u> ضع كثير الحدود $F(x)=x^2-6x+9$ على شكل جداء

نحسب جذور المعادلة $F(x) = 0$:

$$F(x)=0 \Rightarrow x^2-6x-9=0$$

$$a=1 \qquad b=-6 \qquad c=9$$

$$\Delta=b^2-4ac=36-4\times 1\times 9=0$$

$$x_0=\frac{-b}{2a}=\frac{6}{2\times 1}=+3$$

وبالتالي يكتب $F(x)$ على شكل جداء: $F(x)=(x-3)^2$

<u>مثال (٣)</u> ضع كثير الحدود $F(x)=-x^2+9$ على شكل جداء

نحسب جذور المعادلة $F(x) = 0$:

$$F(x)=0 \Rightarrow -x^2+9=0$$

$$x^2=9 \quad \Rightarrow \quad x=3 \quad Or \quad x=-3$$

وبالتالي يكتب $F(x)$ على شكل جداء: $F(x)=-(x+3)(x-3)$

<u>هناك طرق أخرى</u> لكتابة كثير الحدود على شكل جداء، منها:

أ) إخراج عامل مشترك، أمثلة:

$$3x^2-6x=3x(x-2)$$

$$x^2+4x=x(x+4)$$

$$\frac{1}{3}x^2-x=\frac{1}{3}x(x-3)$$

ب) المطابقات الشهيرة:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

ج) التحليل المباشر، إذا كان لدينا كثير حدود من الشكل x^2+bx+c نبحث عن عددين مجموعهما b وجداؤهما c ، أمثلة:

$$x^2-x-2=(x-2)(x+1)$$
$$x^2-x-30=(x-6)(x+5)$$

٣-٣ خطوات دراسة إشارة كثير الحدود بشكل عام

نتبع الخطوات الآتية:

(١)وضع كثير الحدود على شكل جداء (أو قسمة) كثيرات حدود جزئية من الدرجة الأولى أو من الدرجة الثانية والتي سبق أن تم دراستها،

(٢) دراسة إشارة كل واحد من كثيرات الحدود الجزئية على حدة،

(٣) تنظيم جدول ووضع إشارة كل منها في سطر مستقل،

(٤) تتحدد إشارة كثير الحدود بإجراء جداء (أو قسمة) إشارات كثيرات الحدود الجزئية.

مثال (١) ادرس إشارة كثير الحدود $F(x)=x^3+4x^2-12x$

الحل:

١) نضع كثير الحدود بشكل جداء:

$$x^3+4x^2+-12x=x(x^2+4x-12)=x(x+6)(x-2)$$

٢) هناك ٣ كثيرات حدود جزئية: $(x-2)$ $(x+6)$ x ندرس إشارة كل منها

الجذور هي $x = 0$ ، $x = -6$ ، $x = 2$

٣) وضع جدول نضع فيه إشارات كثيرات الحدود الثلاث، ونتيجة ضرب الإشارات لنحصل على إشارة كثير الحدود $F(x)$:

قيم x	- ∞	-6		0		2	+ ∞
كثير الحدود x	-	-	-	0	+	+	+
كثير الحدود $x + 6$	-	0	+	+	+	+	+
كثير الحدود $x - 2$	-	-	-	0	+	+	+
إشارة $F(x)$	-	٠	+	٠	+	+	+

أي أن كثير الحدود سالب قبل القيمة 6- ، وموجب بعد هذه القيمة.

٣-٤ تمارين غير محلولة

ادرس إشارة كل من المقادير الآتية:

$$F(x) = -2x + \frac{1}{2}$$

$$P(x) = -(x^2 + 1)(x^2 - 2x + 1)$$

$$R(x) = \frac{x-2}{x^2+1}$$

٤- المتراجحات

٤-١ تعريف المتراجحة

المتراجحة هي كل مقارنة بين a, b حقيقيين $(a,b\in\Re)$ وتكتب بالشكل:

$a<b$ أو $a>b$

وقد تدخل المساواة أحياناً مع الأكبر أو الأصغر، وبالتالي يمكن كتابة المتراجحة بالشكل:

$a\leq b$ أو $a\geq b$

مثال: $2>\frac{1}{2}$ ، $-1>-1.3$

٤-٢ خواص المتراجحات

ليكن لدينا المتراجحة $a>b$ فإن:

١) إضافة عدد حقيقي $c\in\Re$ إلى طرفي المتراجحة لا يغير اتجاه المتراجحة:

$a>b$ فإن $a+c>b+c$

مثال: $1->2-$ فإن إضافة ١ إلى طرفي المتراجحة $1+1->1+2$ يعطي $0<3>0$

أو إضافة -٢ إلى طرفي المتراجحة تصبح $3-<0>-3$

٢) الضرب بعدد موجب تماماً $c\in\Re^{+*}$ لا يغير اتجاه المتراجحة:

$a>b$ فإن $a.c>b.c$

مثال: $2<5.5>2$ لنضرب الطرفين بالعدد ٢ مثلاً $2\times 2<5.5\times 2>2\times 5.5$ تصبح $4<11>4$

أو الضرب بالعدد $\frac{1}{2}$ فتصبح المتراجحة $1<2.75>1$

٣) الضرب بعدد سالب تماماً $c\in\Re^{-*}$ يغير اتجاه المتراجحة:

$a>b$ فإن $a.c<b.c$

مثال: $1 < 4$ نضرب بالعدد ١- فتصبح $4\times(-1)=-4 < 1\times(-1)=-1$

أو نضرب بالعدد $-\frac{1}{2}$ فتصبح $-2 < -\frac{1}{2}$

٤) إن قلب العددين a, b حيث a, b لهما نفس الإشارة يغير اتجاه المتراجحة:

$a > b$ فإن $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

مثال: $1 < 2$ تصبح بعد قلب الطرفين $1 < \frac{1}{2}$

٥) جمع المتراجحات، بفرض $a,b,c,d \in \Re$:

$$\begin{matrix} a > b \\ c > d \end{matrix} \Leftarrow a+c > b+d$$

مثال: $\begin{matrix} 2 > 0 \\ -1 > -3 \end{matrix}$ بالجمع $1 > -3 \Leftarrow 2+(-1) > 0+(-3)$

٦) ضرب المتراجحات، بفرض $a,b,c,d \in \Re^{+*}$ أعداد موجبة:

$$\begin{matrix} a > b \\ c > d \end{matrix} \Leftarrow a.c > b.d$$

مثال: $\begin{matrix} \frac{3}{2} > 1 \\ 5 > 2 \end{matrix}$ بعد الضرب $\Leftarrow \frac{3}{2}\times 5 > 1\times 2 \Leftarrow \frac{15}{2} > 2$

٤-٣ حل المتراجحات

إن حل متراجحة يعني إيجاد قيم x التي تحقق المتراجحة.

مثال (١) حل المتراجحة التالية $x+\frac{1}{3} > -1$

نضع الحدود التي تحوي x بطرف والحدود الثابتة بطرف آخر:

$$x > -\frac{4}{3} \quad \text{أو} \quad x > -\frac{1}{3} - 1$$

أي أن القيم التي تحقق المتراجحة هي المجال: $x \in \left] -\frac{4}{3}, +\infty \right[$

بشكل عام قد نضطر لدراسة إشارة كثيرات الحدود المكونة للمتراجحة، ولن تتجاوز في المقرر الحالي كثيرات الحدود من الدرجة الأولى أو من الدرجة الثانية.

<u>مثال (٢)</u> حل المتراجحة التالية $x + 2 \geq -x + 4$

$$x \geq 1 \quad \text{أو} \quad 2x \geq 2 \quad \text{أو} \quad x + x \geq -2 + 4$$

أي أن القيم التي تحقق المتراجحة هي المجال: $x \in [+1, +\infty[$

<u>مثال (٣)</u> حل المتراجحة $2x - 5 \geq x + \frac{1}{4}$

$$x \leq \frac{21}{4} \quad \text{أو} \quad 2x - x \leq 5 + \frac{1}{4}$$

أي أن القيم التي تحقق المتراجحة هي : $x \in \left] -\infty, \frac{21}{4} \right]$

مثال (٤) حل المتراجحة $x^2 + 2x - 1 \geq 2 + x$

ننقل جميع الحدود إلى طرف واحد وندرس إشارة كثير الحدود الناتج:

$$x^2 + 2x - x - 1 - 2 \geq 0$$
$$x^2 + x - 3 \geq 0$$

نفرض $x^2 + x - 3 = 0$ ونحلها كمعادلة:

$$\Delta = 1 - 4 \times 1 \times (-3) = 13 > 0$$

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} \approx 1.30 \qquad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2} \approx -2.30$$

x	$-\infty$		-2.30		+1.30		$+\infty$
$x^2 + x - 3$ إشارة		+ + +	0	− − −	0	+ + +	

أي أن القيم التي تحقق المتراجحة هي : $x \in \left]-\infty,-2.30\right] \cup \left[+1.30,+\infty\right[$

٤-٤ تمارين غير محلولة

حل المتراجحات الآتية:

$$-2x+1 \geq 2x-5$$

$$x^2-1 \geq 2x-2$$

$$-2x+\frac{1}{4} \leq x+1$$

$$x^2+3x-1 \geq x+2$$

$$\frac{x-1}{x^2+x} \geq 2$$

$$(x^2+3x-4)(x-1) \geq 0$$

$$\frac{-x+1}{2x^2-4x+1} \leq 1$$

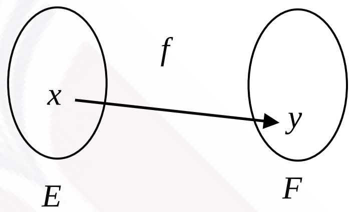
٥- المتتاليات العددية

٥-١ التطبيق

هو علاقة f تربط بين عنصر x من مجموعة E وعنصر y من مجموعة F.

نسمي E المنطلق ونسمي F المستقر. نرمز للتطبيق بالشكل:

$$f : E \to F$$
$$x \to y = f(x)$$



ليس بالضرورة أن كل عنصر y من المستقر صورة لعنصر x من المنطلق، ولكن يمكن أن يكون عنصر y من المستقر صورة لأكثر من عنصر x من المنطلق.

مثال (١)، ليكن لدينا التطبيق:

$$f : \Re \to \Re$$
$$f : x \to y = f(x) = 2x^2$$

المنطلق هو $E = \Re$ والمستقر هو $F = \Re$. أما قاعدة الربط فهي $f(x) = 2x^2$.

$$f(-1) = 2.(-1)^2 = 2 \in \Re$$
$$f(1) = 2.(1)^2 = 2 \in \Re$$
$$f(0) = 2.(0)^2 = 0 \in \Re$$
$$f(\frac{1}{2}) = 2.(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2} \in \Re$$

نلاحظ مما سبق أن العنصر ٢ من المستقر هو صورة لعنصرين +١، -١ من المنطلق.

بنفس الوقت نجد أن العنصر -٥ من المستقر لا يمثل صورة لأي عنصر من المنطلق حيث $2x^2 = -5$ ليس لها حل في $\Re$.

٥-٢ المتتالية

هي تطبيق منطلقه مجموعة الأعداد الطبيعية N ومستقره الحقيقية $\Re$ أو أية مجموعة جزئية منها. نرمز للمتتالية بالشكل:

$$u : N \to \Re$$
$$n \to u(n) = u_n$$

وندعو u_n الحد العام للمتتالية من المرتبة n.

مثال (١)، المتتالية $u_n = 2n^2 + 1$ وتأخذ قيمها كما يلي:

$$n = 0 \Rightarrow u_0 = 1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$n = 9 \Rightarrow u_9 = 163$$

يمكن التعبير عن المتتالية بعلاقة تدريجية حيث نحسب الحد العام للمتتالية u_n بدلالة الحد الذي يسبقه u_{n-1}.

مثال (١) ليكن لدينا جدول التكاليف $C(x)$ بدلالة عدد القطع المنتجة يومياً x كما يلي:

	تقترب x من ١٤ من اليسار →					← تقترب x من ١٤ من اليمين			
x	10	11	12	13	**14**	15	16	17	18
$C(x)$	50	55	60	65		75	80	85	90

يمكن أن نستنتج أن التكاليف $C(x)$ عند $x=14$ تساوي ٧٠ سواء اقتربت x من القيمة ١٤ من اليمين أو من اليسار، وبالتالي نعتبر أن نهاية $C(x)$ تساوي ٧٠ عندما تقترب x من ١٤.

٣-٥ المتتالية الحسابية

نقول عن متتالية u_n أنها حسابية إذا أمكن استنتاج أي حد من حدودها من الحد الذي يسبقه بإضافة ثابت. ونكتبها بالشكل $u_{n+1} = u_n + r$ حيث r ثابت المتتالية الحسابية ونسميه أساس المتتالية u_n.

يكتب الحد العام للمتتالية الحسابية بالشكل $u_n = u_0 + nr$ حيث u_0 الحد الأول و r أساس المتتالية.

مثال (١) لتكن المبيعات اليومية هي سلسلة من الأعداد ٢، ٥، ٨، ١١، ... متتالية حسابية حدها الأول $u_0 = 2$ وأساسها $r = 3$.

مثال (٢) لتكن الخسائر اليومية هي سلسلة من الأعداد ٠، -٢، -٤، -٦، ... متتالية حسابية حدها الأول $u_0 = 0$ وأساسها $r = -2$.

تمارين غير محلولة

اكتب حدود المتتاليات العددية الآتية واستنتج إن كانت حسابية أم لا؟

$$U_n = \frac{2}{n} + 3n \quad ; n \neq 0$$

$$U_n = 2n^2 - 5n + 3$$

$$U_n = \frac{n}{2} + 10$$

استنتج الحد العام للمتتاليات الآتية:

٠، -٢، -٤، -٦، -٨، ...

١٠، ١٠,٥، ١١، ١١,٥، ...

-١٠، -٥، ٠، ٥، ١٠، ١٥، ...

٥-٤ المتتالية الهندسية

نقول عن متتالية u_n أنها هندسية إذا أمكن استنتاج أي حد من حدودها من الحد الذي يسبقه بالضرب بثابت. نكتبها بالشكل $u_{n+1}=u_n.q$ حيث q ثابت المتتالية الهندسية ونسميه أساس المتتالية u_n.

يكتب الحد العام للمتتالية الهندسية بالشكل $u_n=u_0(q)^n$ حيث u_0 الحد الأول و q أساس المتتالية.

<u>مثال (١)</u> متتالية الأعداد ١، ٢، ٤، ٨، ... متتالية هندسية حدها الأول $u_0=1$ وأساسها $q=2$.

<u>مثال (٢)</u> متتالية الأعداد $\ldots,\ -\frac{1}{54},\ \frac{1}{18},\ -\frac{1}{6},\ \frac{1}{2}$ هي متتالية هندسية

حدها الأول $u_0=\frac{1}{2}$ وأساسها $q=-\frac{1}{3}$.

٥-٥ المتتالية المتزايدة والمتتالية المتناقصة

نقول عن متتالية u_n أنها متزايدة إذا تحقق الشرط التالي: $\forall n\in N,\quad u_{n+1}>u_n$

نقول عن متتالية u_n أنها متناقصة إذا تحقق الشرط التالي: $\forall n\in N,\quad u_{n+1}<u_n$

١. كل متتالية حسابية أساسها موجب تكون متزايدة.
٢. كل متتالية حسابية أساسها سالب تكون متناقصة.
٣. كل متتالية هندسية أساسها موجب وأكبر من الواحد تكون متزايدة.
٤. كل متتالية هندسية أساسها موجب وأصغر من الواحد تكون متناقصة.
٥. كل متتالية هندسية أساسها سالب تكون غير متزايدة وغير متناقصة.

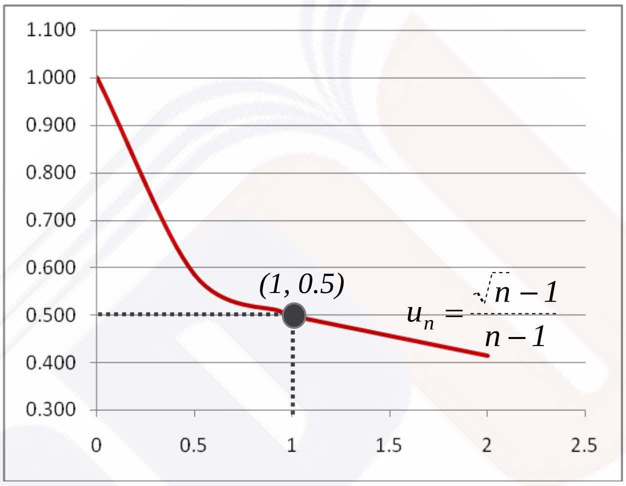
٥-٦ نهاية متتالية

هو دراسة سلوك المتتالية عندما تسعى n إلى اللانهاية، أو إلى قيمة محددة مسبقاً.

نقول أن القيمة l تمثل نهاية المتتالية u_n عندما تسعى n إلى اللانهاية.

<u>مثال (١)</u> لنستخدم جدول لحساب نهاية المتتالية $u_n = \dfrac{\sqrt{n}-1}{n-1}$ عندما تنتهي n إلى القيمة ١ باعتبار أن صيغة المتتالية غير معرفة من أجل $n\text{-}1=0$، من اليمين ومن اليسار بقفزات صغيرة جداً:

	تقترب n من ١ من اليسار			→		←	تقترب n من ١ من اليمين		
n	٠,٩٦	٠,٩٧	٠,٩٨	٠,٩٩	١	١,٠١	١,٠٢	١,٠٣	١,٠٤
U_n	٠,٥٠٥	٠,٥٠٤	٠,٥٠٣	٠,٥٠١	٠,٥	٠,٤٩٩	٠,٤٩٨	٠,٤٩٦	٠,٤٩٥



<u>مثال (٢)</u> لتكن المتتالية ذات الحد العام: $u_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{2n}$

نحسب الحدود الأربعة الأولى:

$$n=1 \Rightarrow u_1 = 1 + \frac{(-1)^1}{2\times 1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$n=2 \Rightarrow u_2 = 1 + \frac{(-1)^2}{2\times 2} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

$$n=3 \Rightarrow u_3 = 1 + \frac{(-1)^3}{2\times 3} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

$$n=4 \Rightarrow u_4 = 1 + \frac{(-1)^4}{2\times 4} = 1 + \frac{1}{8} = \frac{9}{8}$$

نلاحظ أنه كلما ازدادت قيمة n فإن u_n تقترب من الواحد وهذا يعني أن u_n تستطيع أن تكون قريبة جداً من الواحد شريطة أن تكون n كبيرة بقدر كاف.

إذا أردنا أن يكون الفرق بين u_n والنهاية l أقل من عدد صغير جداً وليكن 10^{-3} فإنه يجب دراسة المتراجحة الآتية $|u_n - l| < 10^{-3}$ حيث $l=1$ في المثال السابق:

$$\left|\frac{(-1)^n}{2n}\right| = \frac{1}{2n} < 10^{-3}$$

$$n > \frac{1}{2 \times 10^{-3}} \quad \Rightarrow \quad n > 500$$

إن النتيجة السابقة تدل على أنه من أجل كل n أكبر من ٥٠٠ يكون الفرق بين الحد u_n والنهاية المتوقعة أصغر من 10^{-3}.

نقول عن متتالية أنها تسعى نحو l عندما تسعى n إلى اللانهاية إذا أمكن إيجاد عدد طبيعي $p \in N$ وذلك من أجل كل عدد حقيقي α بحيث يتحقق ما يلي:

$$\forall \alpha \in \Re, \quad \exists p \in N, \quad \forall n > p, \quad |u_n - l| < \alpha$$

في المثال السابق كانت $n > 500$. لذلك $\alpha = 10^{-3}, \quad l = 1, \quad p = 500$.

<u>مثال (٣)</u> برهن أن نهاية المتتالية $u_n = \frac{3n+1}{2n-1}$ هي $\frac{3}{2}$.

نفرض أن $\alpha = 10^{-3}$:

$$|u_n - l| = \left|\frac{3n+1}{2n-1} - \frac{3}{2}\right| = \left|\frac{6n+2-3(2n-1)}{2(2n-1)}\right| = \frac{5}{2(2n-1)}$$

$$\frac{5}{2(2n-1)} < 10^{-3} \qquad \Rightarrow n > 1250.5$$

وبالتالي نستطيع أخذ $p = 1250$ من أجل $\alpha = 10^{-3}$، مما يعني أن نهاية المتتالية هي $\frac{3}{2}$.

٥-٧ نهاية بعض المتتاليات الشهيرة

$$u_n=\frac{1}{n},\quad \lim_{n\to\infty} u_n=0$$

$$u_n=\frac{1}{n^2},\quad \lim_{n\to\infty} u_n=0$$

$$u_n=\frac{1}{n^3},\quad \lim_{n\to\infty} u_n=0$$

$$u_n=\frac{1}{\sqrt{n}},\quad \lim_{n\to\infty} u_n=0$$

$$\lim_{n\to\infty} na^n=0\ ;\ 0<a<1$$

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$$

$$u_n=n,\quad \lim_{n\to\infty} u_n=\infty$$

$$u_n=n^2,\quad \lim_{n\to\infty} u_n=\infty$$

$$u_n=n^3,\quad \lim_{n\to\infty} u_n=\infty$$

$$u_n=\sqrt{n},\quad \lim_{n\to\infty} u_n=\infty$$

$$\lim_{n\to\infty}(n)^{\frac{1}{n}}=1$$

$$\lim_{n\to\infty} a^n=0\ ;\ 0<a<1$$

٥-٨ العمليات على النهايات

بفرض أن u_n,v_n متتاليتين ونهاية كل منهما كما يلي: $\lim_{n\to\infty} u_n=l$ و $\lim_{n\to\infty} v_n=l'$

وبالتالي يمكن إجراء عمليات الجمع، الطرح، الضرب، والقسمة على النهايات كما يلي:

$$\lim_{n\to\infty}(u_n+v_n)=l+l'$$

$$\lim_{n\to\infty}(u_n-v_n)=l-l'$$

$$\lim_{n\to\infty}(u_n.v_n)=l.l'$$

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{u_n}{v_n})=\frac{l}{l'}\quad (l'\neq 0)$$

<u>مثال (١)</u> أوجد نهاية المتتالية $\lim_{n\to 1}(U_n=3n^2-4n+8)$

يمكن النظر إلى هذه المتتالية كثلاث متتاليات وتطبيق العمليات على نهاياتها:

$$\lim_{n\to 1}(3n^2-4n+8)=\lim_{n\to 1}(3n^2)+\lim_{n\to 1}(-4n)+\lim_{n\to 1}(8)$$

$$\lim_{n\to 1}(U_n)=3\lim_{n\to 1}(n^2)-4\lim_{n\to 1}(n)+\lim_{n\to 1}(8)$$

$$\lim_{n\to 1}(U_n)=3\lim_{n\to 1}(1^2)-4\lim_{n\to 1}(1)+\lim_{n\to 1}(8)=3-4+8=7$$

٥–٩ تطبيقات

تطبيق (١): دور التكاليف الثابتة.

تقدر إدارة أحد المصانع أن التكاليف الكلية $C(x)$ لإنتاج x قطعة يأخذ الشكل الآتي:

$C(x) = 7.5\,x + 120.000$ مقدرة بالليرات السورية

حيث تمثل الكمية ١٢٠٠٠٠ التكاليف الثابتة للمصنع، و الكمية $7.5x$ التكاليف المتغيرة.

ويكون وسطي تكلفة إنتاج القطعة الواحدة $A(x)$ هو التكاليف الكلية مقسومة على عدد القطع أي:

$$A(x)=\frac{C(x)}{x} \quad \text{أو} \quad A(x)=\frac{7.5x+120000}{x}$$

والمطلوب: إيجاد نهاية وسطي تكلفة القطعة $A(x)$ عندما تنتهي x إلى اللانهاية. وما هو التفسير الاقتصادي لهذه النتيجة؟

الحل:

نهاية وسطي التكلفة $A(x)$: $\lim\limits_{x\to\infty}(A(x))=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{7.5x+120000}{x}\right)$

بتطبيق العمليات على النهايات: $\lim\limits_{x\to\infty}(A(x))=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{7.5x}{x}\right)+\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{120000}{x}\right)$

وبالتالي تساوي النهاية ٧,٥. $\lim\limits_{x\to\infty}(A(x))=7.5+0=7.5$

التفسير الاقتصادي: مع تزايد عدد القطع المنتجة x إلى كميات كبيرة جداً، فإن مساهمة التكاليف الثابتة (مبلغ ١٢٠٠٠٠ ل.س) تصبح مهملة وتقترب من الصفر عندما تقترب الكمية من ∞، ويبقى فقط تأثير التكاليف المتغيرة بالقطعة الواحدة (أي ٧,٥ ل.س) هو الحاسم في حساب التكاليف الكلية.

تطبيق (٢): تكاليف التلوث.

غالباً ما يتم الموازنة بين تكاليف إزالة تلوث النفط المتسرب في البحر من إحدى ناقلات النفط والنسبة المئوية لتنظيف البقعة الملوثة، ليكن تابع التكلفة $C(x)$ لإزالة نسبة x% له الشكل الآتي:

$$C(x)=\frac{12x}{100-x}$$ حيث x مقدرة بالنسبة المئوية، و $C(x)$ بملايين الليرات السورية

والمطلوب:

١) ما هي تكلفة تنظيف ٢٥% من البقعة الملوثة؟

٢) ضع جدول يوضح تكاليف التنظيف لكل ١٠% بدءاً من $x=10\%$ وحتى $x=90\%$.

٣) رسم الخط البياني لتابع التكلفة.

٤) ماذا يحصل عندما تسعى x إلى $^{-}$١٠٠% أي من اليسار؟ وهل من الممكن تنظيف كامل البقعة أي ١٠٠% من التلوث؟

<u>الحل:</u>

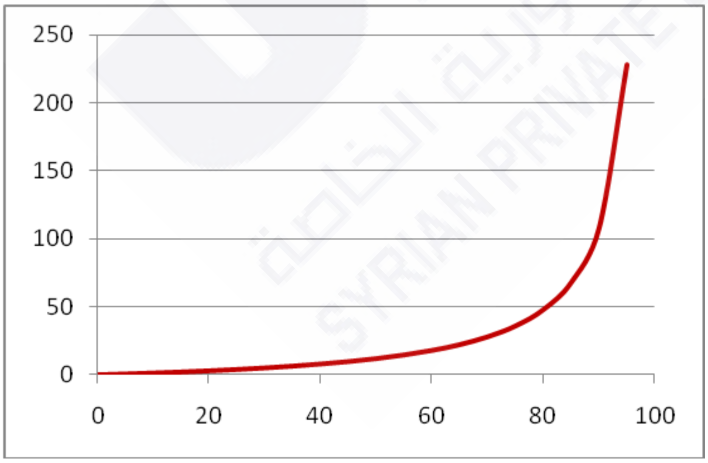
١) تكلفة تنظيف ٢٥% من البقعة: $C(x)=\frac{12(25)}{100-25}=4$

٢) جدول يبين النسبة المئوية للتنظيف مع التكاليف من ١٠% إلى ٩٠%:

$x\ \%$	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$C(x)$	1.333	3	5.143	8	12	18	28	48	108

نلاحظ أن التكاليف تزداد بشكل كبير جداً كلما اقترينا من تنظيف كامل المساحة الملوثة.

٣) الخط البياني: يمكن الاستناد إلى الجدول السابق لرسم الخط البياني، إذ أنه يحتوي على عدد مقبول من النقاط.



٤) عندما تقترب x من ١٠٠%، نلاحظ من الخط البياني أن التكاليف تسعى بسرعة إلى قيم كبيرة جداً باتجاه ∞، ويمكن التأكد من ذلك بحساب نهاية متتالية التكاليف:

$$\lim_{x\to\infty}(C(x)) = \lim_{x\to\infty}\frac{12x}{100-x} = \infty$$

بمعنى أن إزالة كامل التلوث مستحيل كون التكاليف تصبح لا نهائية.

تطبيق (٣): تكاليف الإدارة.

تقدر إدارة الشركة أنه إذا تم استعمال نسبة مئوية من الطاقة الإنتاجية $x\%$، فإن التكاليف الكلية للعمليات الإدارية $C(x)$ مقدرة بآلاف الليرات تُعطى بالتابع الآتي:

$$C(x) = \frac{8x^2 - 636x - 320}{x^2 - 68x - 960}$$ حيث x هي النسبة المئوية المستعملة من الطاقة الإنتاجية.

والمطلوب:

١) ما هي تكاليف عدم التشغيل إطلاقاً ($x=0\%$) ؟

٢) ما هي تكاليف استخدام كامل الطاقة الإنتاجية ($x=100\%$) ؟

٣) وضع جدول يوضح التكاليف الكلية بدلالة النسبة المستخدمة من الطاقة الإنتاجية وذلك من $x=0\%$ إلى $x=100\%$ وبقفزات ١٠%.

٤) رسم الخط البياني لتابع التكاليف الكلية ؟

الحل:

١) تكاليف عدم التشغيل أي من أجل $x=0$ تساوي حوالي ٣٣٣ ل.س، كما يلي:

$$C(0) = \frac{8(0)^2 - 636(0) - 320}{(0)^2 - 68(0) - 960} = 0.333$$

٢) تكاليف التشغيل بالطاقة القصوى أي من أجل $x=100$ تساوي تقريباً ٧١٧٩ ل.س:

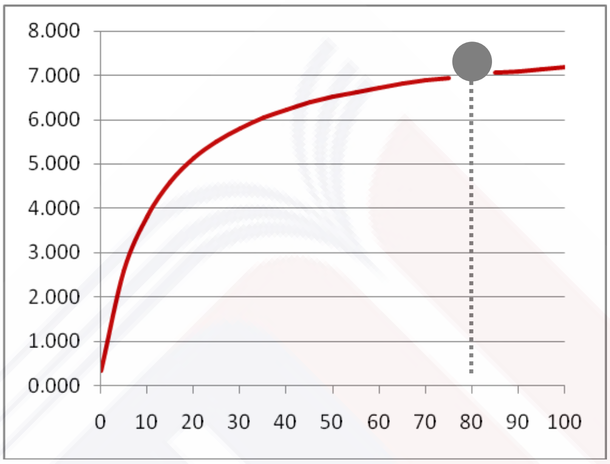
$$C(100) = \frac{8(100)^2 - 636(100) - 320}{(100)^2 - 68(100) - 960} = 7.179$$

٣) جدول يبين النسبة المئوية للتشغيل مع التكاليف الكلية من ٠% إلى ١٠٠%:

x %	٠	10	20	30	40	50	60	70	**80**	90	100
C(x)	0.333	3.818	5.125	5.810	6.231	6.516	6.722	6.878	**غير معرف**	7.098	7.179

نلاحظ أن التكاليف غير قابلة للحساب عند $x=80\%$، وذلك لأن المقدار $x2 - 68\,x - 960$ يساوي الصفر عندما $x=80$، ولا يمكن حساب النهاية عند هذه النقطة سواء من اليمين أو من اليسار كون التابع غير مستمر عند هذه النقطة.

٤) الخط البياني للتابع: يمكن الاعتماد على الجدول السابق لرسم الخط البياني، وذلك بعد حذف النقطة $x=80\%$ بسبب عدم القدرة على حساب التكاليف عند هذه النقطة.



نلاحظ من المخطط أن نهاية تابع التكاليف عند $x=80\%$ يبدو أنها تتروح حول ٧٠٠٠.

٥-١٠ تمارين غير محلولة

أوجد نهاية كل من المتتاليات:

$$u_n = -\frac{3}{2}n^2 + 2n + 1$$

$$u_n = \frac{-2n^2 + 1}{n^3 - 1}$$

$$u_n = \frac{\sqrt{n+1}}{n^2}$$

$$u_n = (\frac{2}{3})^n$$

$$u_n = \sqrt{2n^2 - 1}$$

$$u_n = \frac{6n - 1}{\sqrt{n^2 + 1}}$$

$$u_n = \frac{2n^2 - 1}{5n}$$

$$u_n = \sqrt{\frac{1}{n^2} + 1}$$

٦- التوابع العددية

٦-١ تعريف

التابع هو كل تطبيق f منطلقه $\Re$ أو مجموعة جزئية منها (نرمز لها I) ومستقره $\Re$.

نرمز له بالشكل
$$\begin{aligned} f &: I \to \Re \\ x &\to y = f(x) \end{aligned}$$
حيث $y = f(x)$ تدعى قاعدة ربط التابع.

تمثل x عنصر من المنطلق، وتمثل y عنصر من المستقر.

ندعو المستقر الفعلي للتابع f مجموعة القيم الحقيقية التي يأخذها التابع f من أجل كل عنصر x من المنطلق ونرمز لها بالرمز Y.

<u>مثال (١)</u> التابع $f(x) = 2x^2 - 1$ منطلقه $\Re$ ومستقره $\Re$. مستقره الفعلي $[-1, +\infty[$.

<u>مثال (٢)</u> التابع $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2}$ منطلقه $\Re^*$ ومستقره $\Re$.

<u>مجموعة التعريف:</u> تمثل مجموعة المنطلق I وهي مجموعة جزئية من $\Re$ والتي يأخذ فيها المتحول x قيمه، نرمز لمجموعة التعريف بالرمز D_f.

<u>مثال (٣)</u> التابع $f(x) = x^2 - 1$ معرف على $\Re$.

<u>مثال (٤)</u> التابع $f(x) = \dfrac{2x^2 - 1}{x + 1}$ معرف على $\Re - \{-1\}$.

<u>مثال (٥)</u> التابع $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ معرف عندما $x^2 - 1 \geq 0$.
$$\Rightarrow x^2 \geq 1 \quad \Rightarrow x \in]-\infty, -1] \cup [+1, +\infty[$$

<u>مثال (٦)</u> التابع $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ معرف على $\Re$.

مثال (٧) التابع $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x+1}}$ معرف عندما $x+1>0$.

$$\Rightarrow x>-1 \quad \Rightarrow x\left[-1,+\infty\right[$$

مثال (٨) التابع $f(x)=sin(2x)$ معرف على $\Re$ ومستقره الفعلي $\left[-1,+1\right]$.

٦-٢ المستقيمات المقاربة

ليكن λ الخط البياني للتابع العددي $y=f(x)$ والمرسوم في جملة متعامدة نظامية oxy. يوجد ثلاثة أنواع من المقاربات للخط البياني للتابع f.

١. مستقيم مقارب يوازي ox إذا تحقق الشرط الآتي:

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=a$ حيث $a\in\Re$ فإن المستقيم $y=a$ يدعى مستقيم مقارب يوازي ox.

٢. مستقيم مقارب يوازي oy إذا تحقق الشرط الآتي:

$\lim_{x\to b} f(x)=\pm\infty$ حيث $b\in\Re$ فإن المستقيم $x=b$ يدعى مستقيم مقارب يوازي oy.

٣. مستقيم مقارب مائل إذا تحقق الشرط الآتي:

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ فإنه توجد إمكانية وجود مستقيم مقارب مائل D.

بفرض $Y=ax+b$ معادلة هذا المستقيم، نقول إن D مستقيم مقارب مائل للخط البياني للتابع $f(x)$ إذا كان $f(x)-Y=\varepsilon(x)$ حيث $\varepsilon(x)$ تابع يسعى إلى الصفر عندما تسعى x إلى اللانهاية.

للبحث عن المستقيمات المقاربة بشكل عام، نحدد مجموعة التعريف ونكتبها على شكل مجالات ثم نبحث عن النهايات عند أطراف المجالات.

مثال (١) المستقيمات المقاربة للتابع $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}+1$

تحدد مجموعة تعريفه من أجل $1-x>0$ أو $x<1$ وتصبح $D_f=]-\infty,1[$

أي $\lim_{x\to-\infty} f(x)=1$ وبالتالي $y=1$ مستقيم مقارب يوازي ox.

$\lim_{x\to 1} f(x)=+\infty$ وبالتالي $x=1$ مستقيم مقارب يوازي oy.

مثال (٢) المستقيمات المقاربة للتابع $f(x)=\dfrac{3x-1}{x-2}$

مجموعة تعريفه من أجل $x-2\neq 0$ هي $D_f=]-\infty,2[\cup]2,+\infty[$

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=3$ وبالتالي $y=3$ مستقيم مقارب يوازي ox.

$\lim_{x\to 2} f(x)=\pm\infty$ وبالتالي $x=2$ مستقيم مقارب يوازي oy.

مثال (٣) المستقيمات المقاربة للتابع $f(x)=ln(x-1)$

مجموعة تعريفه تحدد من أجل $x-1>0$ هي $D_f=]1,+\infty[$

$\lim_{x\to 1} f(x)=-\infty$ وبالتالي $x=1$ مستقيم مقارب يوازي oy.

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ وبالتالي احتمال وجود مقارب مائل لا نبحث عنه إلا إذا طلب ذلك.

مثال (٤) برهن أن المستقيم $Y=x$ هو مستقيم مقارب مائل للتابع $f(x)=x-e^x$

نوجد الفرق $f(x)-Y$: $f(x)-Y=x-e^x-x=e^x$

وبالتالي فإن التابع $\varepsilon(x)$ يصبح $\begin{matrix}\varepsilon(x)=e^x \\ \lim_{x\to-\infty}\varepsilon(x)=0\end{matrix}$

إذاً المستقيم $y=x$ مقارب مائل للتابع $f(x)$ عندما تسعى x إلى $-\infty$.

٦-٣ الحد الأعلى والحد الأدنى لتابع

الحد الأعلى لتابع (إن وجد) هو العنصر الأكبر الأصغري على مجموعة قيمه (مستقره الفعلي).

M حد أعلى للتابع $f(x)$ $\Leftrightarrow$ $\forall\, x \in D_f\ ,\ f(x) \le M$

الحد الأدنى لتابع (إن وجد) هو العنصر الأصغر الأعظمي على مجموعة قيمه (مستقره الفعلي).

m حد أدنى للتابع $f(x)$ $\Leftrightarrow$ $\forall\, x \in D_f\ ,\ f(x) \ge m$

نقول عن تابع أنه محدود من الأعلى إذا كان له حد أعلى.

نقول عن تابع أنه محدود من الأدنى إذا كان له حد أدنى.

نقول عن تابع أنه محدود فقط إذا كان له حد أعلى وحد أدنى.

<u>مثال (١)</u> ما هي حدود التابع إن وجدت $f(x)=2\sin x+\frac{1}{2}$

$$x \in \Re$$
$$-1 \le \sin x \le +1$$
$$-2 \le 2\sin x \le +2$$
$$-\frac{3}{2} \le 2\sin x+\frac{1}{2} \le \frac{5}{2}$$

وبالتالي فإن $f(x)$ له حد أعلى $\frac{5}{2}$ وله حد أدنى $-\frac{3}{2}$.

<u>مثال (٢)</u> ما هي حدود التابع إن وجدت $f(x)=2+3\sin^2 x$

$$x \in \Re$$
$$0 \le \sin^2 x \le +1$$
$$0 \le 3\sin^2 x \le +3$$
$$2 \le 2+3\sin^2 x \le 5$$

وبالتالي فإن $f(x)$ له حد أعلى ٥ وله حد أدنى ٢.

مثال (٣) ما هي حدود التابع إن وجدت $f(x)=x^2-4x+1$

إن كل تابع صحيح من الدرجة الثانية من الشكل $f(x)=ax^2+bx+c$ يمثل بقطع مكافئ:

- ✓ إذا كـان $a>0$ فـإن تقعره يكـون نحـو الأعلـى ويكـون لـه حـد أدنـى تمثـل ذروة القطـع المكافئ.
- ✓ إذا كـان $a<0$ فـإن تقعره يكـون نحـو الأدنـى ويكـون لـه حـد أعلـى تمثـل ذروة القطـع المكافئ.

لإيجـاد حـده الأعلـى أو حـده الأدنـى نـتمم عبـارة التـابع $f(x)$ إلـى مربـع كامـل. وبالتـالي تكتـب بالشكل:

$$f(x)=x^2-4x+4-4+1$$
$$f(x)=(x-2)^2-3$$

أي أن التابع السابق يمثل بقطع مكافئ تقعره نحو الأعلى وحده الأدنى هو −٣ .

تمارين غير محلولة، ابحث عن المستقيمات المقاربة للتوابع الآتية:

$$f(x)=\frac{2x-1}{x-4}$$
$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$$
$$f(x)=\cos x+2$$
$$f(x)=2\sin^2 x-1$$
$$f(x)=\frac{\ln x}{x}$$
$$f(x)=e^{-x}+1$$
$$f(x)=-x^2+x-3$$
$$f(x)=2x^2-x+1$$

٦−٤ دراسة تحولات التوابع العددية

ليكن f تابع حقيقي $\begin{aligned} f: D_f &\to \Re \\ x &\to y=f(x) \end{aligned}$

نقول عن f أنه مستمر عند النقطة x_0 إذا تحقق الشرطان الآتيان:

أ- $x_0 \in D_f$

ب- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

مثال (١) هل التابع $f(x) = 2x^2 - 1$ مستمر عند النقطة $x_0 = 1$ ؟

إن $x_0 = 1 \in D_f = \Re$

$$\lim_{x \to 1}(2x^2 - 1) = 1 = f(1)$$

وبالتالي التابع مستمر عند النقطة $x_0 = 1$.

مثال (٢) هل التابع $f(x) = \begin{cases} 2x^2 & x \geq 0 \\ x - 1 & x < 0 \end{cases}$ مستمر عند النقطة $x_0 = 0$ ؟

إن $x_0 = 0 \in D_f = \Re$

$$\lim_{\substack{> \\ x \to 0}} f(x) = 2 \times (0)^2 = 0$$

$$\lim_{\substack{< \\ x \to 0}} f(x) = 0 - 1 = -1$$

$$f(0) = 2 \times (0)^2 = 0$$

نلاحظ أن $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} f(x) \neq \lim\limits_{\substack{< \\ x \to 0}} f(x)$

وبالتالي التابع غير مستمر عند النقطة $x_0 = 0$.

مثال (٣) هل التابع $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & x \geq 1 \\ 5x & x < 1 \end{cases}$ مستمر عند النقطة $x_0 = 1$ ؟

إن $x_0 = 1 \in D_f = \Re$

$$\lim_{\substack{> \\ x \to 0}} f(x) = 2 \times 1 + 3 = 5$$

$$\lim_{\substack{< \\ x \to 0}} f(x) = 5 \times 1 = 5$$

$$f(1) = 2 \times 1 + 3 = 5$$

نلاحظ أن $\lim_{\substack{> \\ x \to 1}} f(x) = \lim_{\substack{< \\ x \to 1}} f(x) = f(1)$

وبالتالي التابع مستمر عند النقطة $x_0 = 1$.

<u>مثال (٤)</u> هل التابع $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{2x - 1}$ مستمر عند النقطة $x_0 = \dfrac{1}{2}$ ؟

إن مجموعة تعريف التابع هي : $D_f = \left]-\infty, \dfrac{1}{2}\right[\cup \left]\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$

إن القيمة $\dfrac{1}{2} \notin D_f$ وبالتالي التابع غير مستمر عند النقطة $x_0 = \dfrac{1}{2}$.

٦-٥ تعريف اشتقاق تابع

ليكن f تابع حقيقي
$$f : D_f \to \Re$$
$$x \to y = f(x)$$

نقول عن f أنه قابل للاشتقاق عند النقطة x_0 إذا تحقق الشرطان الآتيان:

أ- $x_0 \in D_f$

ب- موجودة $(\neq \infty)$ $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

نسمي النهاية السابقة قيمة التابع المشتق عند النقطة x_0. ونرمز لها بالرمز $f'(x_0)$.

وبالتالي نستطيع أن نعرف ما نسميه التابع المشتق f' وذلك على النحو التالي:

$$f' : D_{f'} \subseteq D_f \to \Re$$
$$x \to f'(x)$$

ملاحظة: كل تابع f قابل للاشتقاق عند النقطة x_0 أو على مجال فهو مستمر عند النقطة x_0 أو على هذا المجال، أما العكس غير صحيح.

مثال (١) برهن أن التابع $f(x)=2x^2-1$ قابل للاشتقاق عند النقطة $x_0=0$.

إن هذا التابع هو تابع صحيح فهو معرف ومستمر على $\Re$.

$$x_0=0\in D_f$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^2-1-(-1)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{x}=\lim_{x\to 0}2x=0\neq\infty$$

وبالتالي فإن التابع قابل للاشتقاق عند $x_0=0$.

مثال (٢) هل التابع $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+2}$ قابل للاشتقاق عند النقطة $x_0=1$ وعند النقطة $x_0=-2$؟

إن مجموعة تعريف التابع هي $D_f=\left]-\infty,-2\right[\cup\left]-2,+\infty\right[$

$x_0=-2\notin D_f \Leftarrow$ التابع غير قابل للاشتقاق عند $x_0=-2$.

$$x_0=1\in D_f$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\frac{x^2-1}{x+2}-0}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{(x-1)(x+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2}{x^2}=1\neq\infty$$

وبالتالي التابع قابل للاشتقاق عند النقطة $x_0=1$.

العمليات على المشتقات

ليكن f,g تابعين حقيقيين وليكن f',g' مشتقي التابعين السابقين، فإنه يمكن إجراء عمليات الجمع، الطرح، الضرب، والقسمة على المشتقات كما يلي:

$$(f+g)' = f' + g'$$
$$(f-g)' = f' - g'$$
$$(f.g)' = f'g + g'f$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2} \qquad (g \neq 0)$$

<u>مشتقات التوابع الأساسية</u>

التابع الثابت $f(x) = K \in \Re \Rightarrow f'(x) = 0$

مثال:
$$f(x) = -1.5 \Rightarrow f'(x) = 0$$
$$f(x) = 0 \Rightarrow f'(x) = 0$$

التابع الصحيح من الدرجة الأولى
$$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$$
$$f(x) = ax \Rightarrow f'(x) = a$$
$$f(x) = ax + b \Rightarrow f'(x) = a$$

مثال:
$$f(x) = -2x + 1 \Rightarrow f'(x) = -2$$
$$f(x) = 3x \Rightarrow f'(x) = 3$$

التابع الصحيح من الدرجة الثانية
$$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$$
$$f(x) = ax^2 \Rightarrow f'(x) = 2ax$$
$$f(x) = ax^2 + bx \Rightarrow f'(x) = 2ax + b$$

مثال:
$$f(x) = -2x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = -4x$$
$$f(x) = 2x^2 - 3x + 5 \Rightarrow f'(x) = 4x - 3$$

التابع الصحيح من الدرجة n : $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$

مثال: $f(x) = 3x^5 + 1 \Rightarrow f'(x) = 15x^4$

تابع الجذر التربيعي:

$$f(x)=\sqrt{x} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f(x)=\sqrt{ax} \Rightarrow f'(x)=\frac{a}{2\sqrt{ax}}$$

$$f(x)=\sqrt{ax+b} \Rightarrow f'(x)=\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$$

$$f(x)=\sqrt{h(x)} \Rightarrow f'(x)=\frac{h'(x)}{2\sqrt{h(x)}}$$

مثال:

$$f(x)=\sqrt{3x^2+x-1} \Rightarrow f'(x)=\frac{6x+1}{2\sqrt{3x^2+x-1}}$$

أمثلة، مشتقات كل من التوابع:

$$f(x)=2x^2+1$$
$$g(x)=3x^3-2x^2+x-1$$
$$h(x)=\frac{3x-1}{2x}$$
$$l(x)=\sqrt{3x+1}$$

هي:

$$f'(x)=4x$$
$$g'(x)=9x^2-4x+1$$
$$h'(x)=\frac{3(2x)-2(3x-1)}{(2x)^2}=\frac{2}{4x^2}=\frac{1}{2x^2}$$
$$l'(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$$

٦-٦ تزايد وتناقص تابع، والنهايات

ليكن $f(x)$ تابع مستمر وقابل للاشتقاق على مجال ما من مجموعة تعريفه:

نقول عن $f(x)$ أنه متزايد (متزايد تماماً) على هذا المجال إذا كان $f'(x)$ موجباً (موجباً تماماً) على هذا المجال.

نقول عن $f(x)$ أنه متناقص (متناقص تماماً) على هذا المجال إذا كان $f'(x)$ سالباً (سالباً تماماً) على هذا المجال.

القيم الموضعية (النهايات الحدية) لتابع

ليكن $f(x)$ تابع مستمر وقابل للاشتقاق على مجال ما من مجموعة تعريفه.

نقول أن للتابع $f(x)$ قيمة موضعية عند النقطة x_0 من هذه المجال إذا كان $f'(x_0)=0$.

نقول عن القيمة الموضعية أنها عظمى إذا غير $f'(x)$ إشارته من الموجبة إلى السالبة عند النقطة x_0 .

نقول عن القيمة الموضعية أنها صغرى إذا غير $f'(x)$ إشارته من السالبة إلى الموجبة عند النقطة x_0 .

٦-٧ دراسة تحولات تابع عددي ورسم خطه البياني

نتبع الخطوات الآتية:

١. نحدد مجموعة تعريفه ونكتبها على شكل مجالات.

٢. نوجد نهايات التابع عند أطراف المجالات ونحدد المستقيمات المقاربة الموازية للمحورين oy, ox .

٣. نوجد مشتق التابع ونحدد مجموعة تعريفه ثم ندرس إشارته لتحديد مجالات تزايد وتناقص التابع.

٤. ننظم جدول بالنتائج السابقة يدعى جدول تحولات التابع. نحدد من خلاله الحدين الأعلى والأدنى (إن وجدا) والقيم الموضعية العظمى والصغرى (إن وجدت).

٥. إيجاد بعض النقاط المساعدة مثل نقاط التقاطع مع المحورين oy, ox .

٦. رسم الخط البياني للتابع.

نقتصر في المقرر الحالي على دراسة التوابع الصحيحة من الدرجة الأولى ومن الدرجة الثانية.

٦-٨ تطبيقات

تطبيق (١): الكمية المثلى للإنتاج.

يُقدر أحد المنتجين أنه إذا أنتج كميات كبيرة x (بمئات القطع)، فإن السعر P يُصبح تابع للكمية أو الطلب ويُعطى بالشكل الآتي: $P = 60 - x$. ويرغب المنتج طبعاً بتعظيم إيراداته، فما هي الكمية المثلى التي تجعل إيراداته أكبر ما يمكن؟

الحل:

نتبع الخطوات التقليدية لدراسة تابع الإيرادات والبحث عن القيمة أو النهاية العظمى لهذا التابع.

الإيرادات $R(x)$ = السعر p * الكمية x

السعر هو تابع للكمية أي متغير وليس ثابتاً: $P = 60 - x$

إذاً، الإيرادات $R(x) = x\,(60 - x) = -x^2 + 60\,x$ وهو تابع من الدرجة الثانية

التابع المطلوب إيجاد نهايته العظمى إذاً هو: $\boldsymbol{R(x) = -x2 + 60\,x}$

(١) مجموعة التعريف: حيث أن x تمثل عدد القطع المنتجة فلا يمكن إلا أن تكون موجبة، وبالتالي التابع معرف على جميع القيم الموجبة $[0, +\infty[$.

(٢) النهايات الحدية عند أطراف مجال التعريف:

عند الحد الأصغر أي الصفر $x=0$ يأخذ القيمة $R(x) = -(0)^2 + 60\,(0) = 0$

عندما تنتهي x إلى فإن الإيرادات تنتهي إلى $-\infty$

(٣) المشتق الأول للتابع: $R'(x) = -2\,x + 60$

لإيجاد النهاية، نعدم المشتق الأول: $R'(x) = 0$

أي $-2\,x + 60 = 0$ وبالتالي $x = 60/2 = 30$

من أجل $x=30$ نجد الإيرادات تساوي $R\,(x) = -(30)^2 + 60\,(30) = 900$

إذاً تبدو النقطة $(30, 900)$ هي نهاية للتابع، علينا التأكد أنها نهاية عظمى.

(٤) نضع جدول التحولات:

الكمية x	٠	٣٠	$+\infty$
المشتق $R'(x)$	موجب + + +	٠	سالب − − −
التابع $R(x)$	٠ متزايد	٩٠٠	متناقص $-\infty$

طالما أن التابع يتزايد من ٠ حتى نقطة النهاية $x=30$ ثم يتناقص اعتباراً من هذه النقطة، فإن النهاية عظمى. وللتأكد يمكن حساب المشتق الثاني، ورسم الخط البياني للتابع.

المشتق الثاني لتابع الإيرادات: $R''(x) = -2$ وهو سالب دوماً أي التقعر نحو العينات السالبة أي أن النهاية عظمى.

(٥) بعض النقاط المساعدة

نقطة التقاطع مع محور العينات أي من أجل $x=0$:

نجد قيمة $R(x)$: $R(x) = -(0)^2 + 60\,(0) = 0$، النقطة الأولى $(0, 0)$ وهي مركزالمحاور

نقاط التقاطع مع محور السينات أي $R(x)=0$، نسحب قيم x:

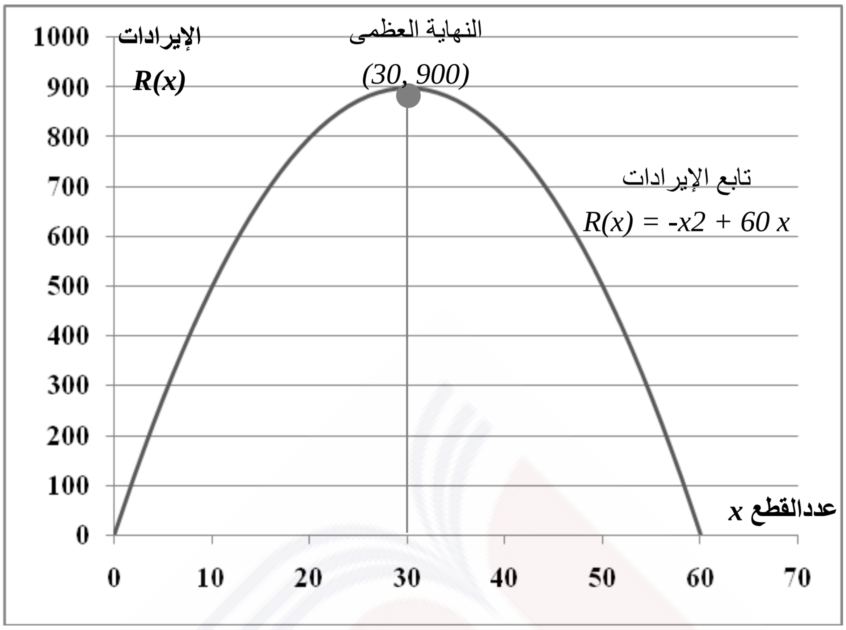
$R(x) = -x^2 + 60x = 0$ يمكن كتابته على شكل جداء: $x(-x + 60) = 0$ وبالتالي نجد أن التابع يتقاطع مع محور السينات في نقطتين هما: $x=0$ و $x = 60$

النقطة الثانية $(0, 0)$ وهي نفس النقطة الأولى التي حصلنا عليها أعلاه،

النقطة الثالثة $(60, 0)$

(٦) الخط البياني للتابع

بالاستعانة بالنقاط المحسوبة أعلاه، وبجدول تحولات التابع، يمكن رسم الخط البياني للتابع ويأخذ الشكل الآتي:



وبالنتيجة، فإن الإيرادات تصل الحد الأقصى لتبلغ ٩٠٠ عندما يكون عدد القطع المنتجة يساوي ٣٠ قطعة، وهي الكمية الواجب إنتاجها.

<u>تطبيق (٢): توازن سلعة في السوق.</u>

تشير دراسات السوق إلى أن المنتج يعرض كمية x من مادة ما عندما يكون السعر $p=S(x)$ ، وبأن نفس الكمية ستطلب من المستهلك عندما يكون السعر $P=D(x)$، حيث يُعطى تابعي الطلب والعرض كما يلي:

تابع الطلب: $D(x) = 174 - 6x$ تابع العرض: $S(x) = x^2 + 14$

والمطلوب:

١) معرفة الكمية والسعر عن عندما يتوازن السوق؟

٢) رسم الخطوط البيانية للعرض والطلب على نفس جملة الإحداثيات، والتعليق عليه.

<u>الحل:</u>

١) يتوازن سوق المادة عندما يكون العرض يساوي الطلب أي $S(x) = D(x)$

أي: $x^2 + 14 = 174 - 6x$

نكتب هذه المعادلة بشكل نظامي فتصبح: $x^2 + 6x - 160 = 0$

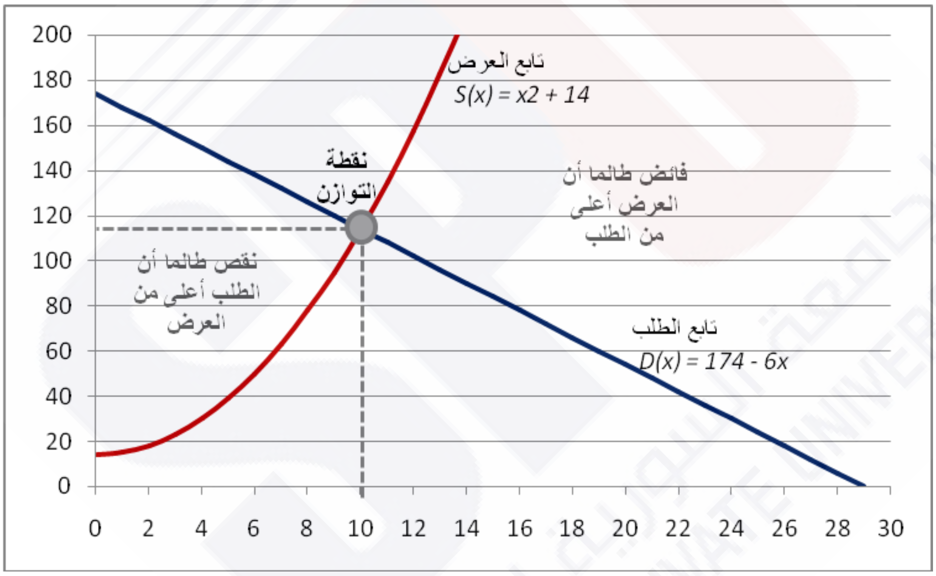
أو بالشكل: $(x-10)(x+6) = 0$ وبالتالي فجذور المعادلة تكون: $x = -16$ و $x = 10$

وحيث أن x هي كمية من واحدات الإنتاج فهي قيمة موجبة، أي أن الحل المقبول هو $x = 10$ ونرفض الحل $x = -16$ لأنه سالب.

إذاً، $x = 10$ هي كمية الإنتاج التي تساوي العرض بالطلب ندعوها كمية التوازن،

وبالتالي يكون السعر عند هذه الكمية (ندعوه سعر التوازن) بالتبديل في أي من معادلتي العرض أو الطلب: $P = D(10) = 174 - 6(10) = 114$.

٢) رسم الخطوط البيانية:



نلاحظ من الخطوط البيانية:

أ- التوازن بين العرض والطلب يتم عندما يكون السعر يساوي ١٠ل.س، والكمية تساوي ١١٤ واحدة،

ب-أن المنتج لن يعرض أية كمية بسعر أقل من ١٤ ل.س أي نقطة تقاطع تابع العرض مع محور العينات $x=0$،

ت-أن الطلب سيصبح صفر أي لا أحد سيشتري السلعة عندما يتجاوز السعر ٢٩ ل.س،

ث-من أجل كمية $0 \le x \le 10$ فإن هناك نقص في عرض السلعة، كما يبين الشكل أن كمية العرض أقل من كمية الطلب،

ج-من أجل $10 \le x \le 29$ فإن هناك فائض في عرض السلعة، كما يبين الشكل أن كمية العرض أكبر من كمية الطلب.

٦-٩ تمارين غير محلولة

ادرس تحولات التوابع:

$$f(x)=3x$$

$$f(x)=-2x+1$$

$$f(x)=2x^2+x-1$$

$$f(x)=-x^2+3$$

$$f(x)=\frac{2x-1}{x^2}$$

$$f(x)=\frac{x^2-1}{3x+1}$$

$$f(x)=\sqrt{x^2-1}$$